Semaine 1b1:

Intro à la Mécanique des Structures

MICRO-200 en 2 parties principales:

1. Mécanique des structures (semaines 1-10)

2. Conception mécanismes (semaines 11-14)

12-09-2024

Edition 2024

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
Herbert Shea				
1	10.09	1. Intro des **3 enseignants** 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	12.09	Contraintes 1D	x	Série 1
Danick Briand				
2	17.09	Contraintes	x	Série 1
2	19.09	Contraintes	x	Série 2
3	24.09	Déformation	x	Série 2
3	26.09	Déformation	x	Série 3
4	01.10	Transformation	x	Série 3
4	03.10	Transformation	x	Série 4
5	08.10	Torsion	x	Série 4
5	10.10	Torsion	x	Série 5

Herbert Shea				
6	15.10	Forces internes, contrainte normale en flexion	x	
6	17.10	Composite axe neutre	x	Série 6
7	29.10	Cisaillement et poutre flèche	x	Série 6
7	31.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	05.11	Examen mi-semestre D. Briand		
8	07.11	Poutre flèche suite	x	Série 7
9	12.11	Feedback midterm + guidage flexible	x	Série 7
9	14.11	Systèmes indéterminés et thermiques	x	Série 8
10	19.11	Systèmes indéterminés et Flambage	x	Séries 8-9
10	21.11	Flambage	x	Série 9

Simon Henein				
11	26.11	Ressorts	x	Série 10
11	28.11	Guidages flexibles	x	Série 11
12	03.12	Guidages flexibles	x	Série 11
12	05.12	Guidages flexibles	x	Série 11
13	10.12	Transmissions	x	Série 12
13	12.12	Transmissions	x	Série 12
14	17.12	Engrenages	x	Série 13
14	19.12	Accouplements	x	Série 14

Objectifs d’apprentissage de ces slides (semaine1b = aujourd’hui)

- Comprendre les objectifs de la mécanique des structures

- Pouvoir identifier et expliquer les hypothèses du cours

- Savoir que $f = kx$ c’est $\sigma = E\epsilon$ (loi de Hooke)

Objectifs de la mécanique des structures:

Assurer la sécurité et le bon fonctionnement des structures tout en trouvant une solution économe et durable.

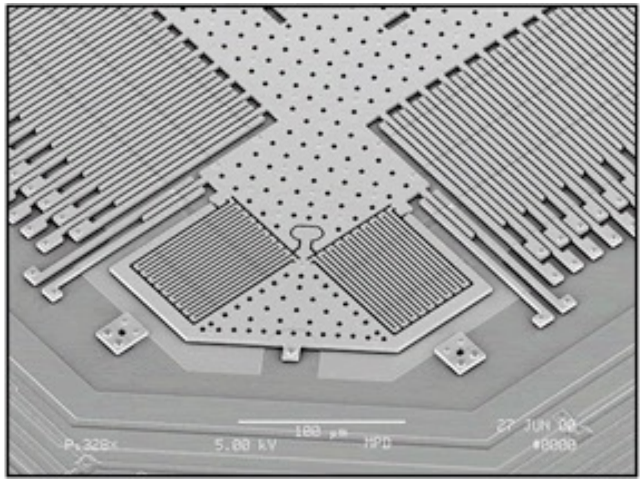
a) Déformation maitrisée
b) Rigidité
c) Fiabilité

Toute contrainte déforme le matériau:

un objet indéformable n'existe pas!!

Il est essentiel pour l'ingénieur en microtechnique,
qui recherche la précision,
de connaître et maitriser ces contraintes et déformations

Robot Delta
(robot parallèle)



Analog Devices ADXL

S. Henein et al

Objectifs de la mécanique des structures:

Déterminer **contraintes** et **déformations** dans les structures en fonction des charges

et donc concevoir l'objet de façon à maîtriser les contraintes et déformation)

1. Calculer les **forces internes** (σ *stress*) à partir des **forces externes.** <u>**équation d'équilibre**</u> ($\sigma = N/A$)

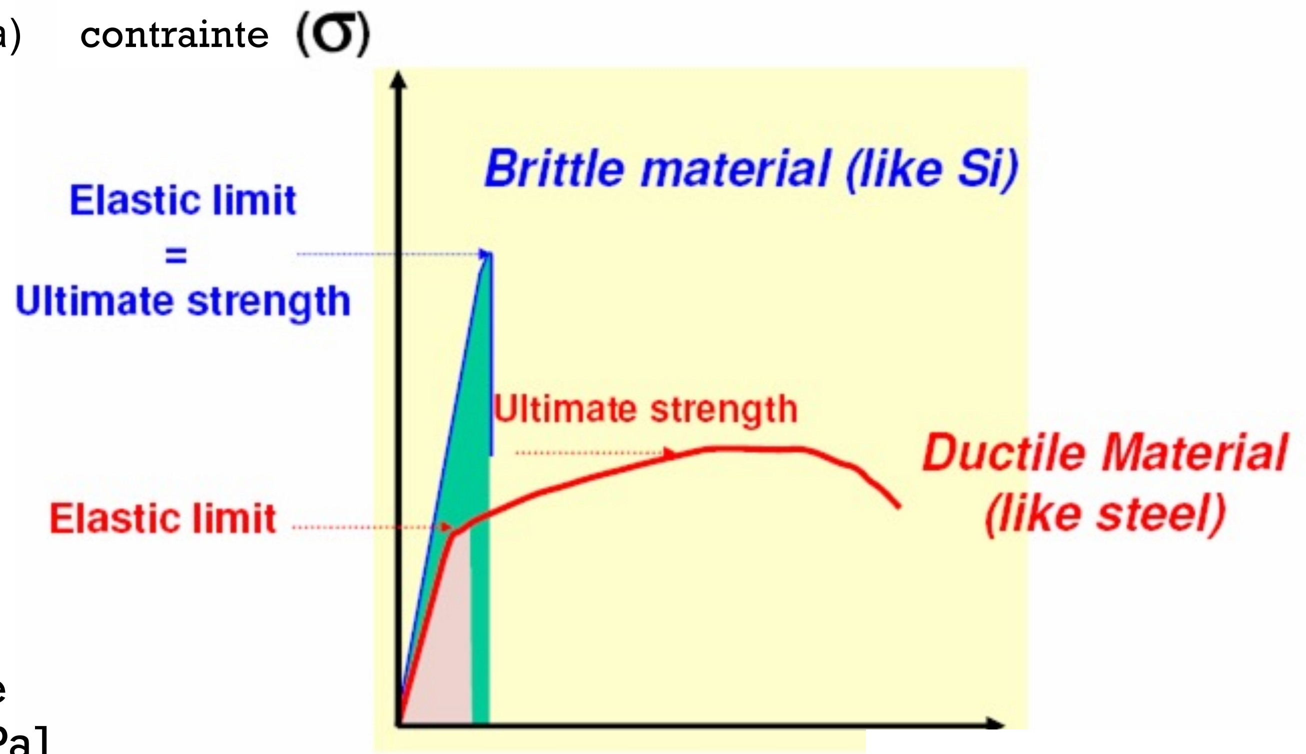
2. Utiliser ces contraintes internes pour calculer à une **déformation relative** (ε *strain*). <u>**équation constitutive**</u> loi de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$), mais en 3D

3. **Déterminer la déformation statique due à une charge**

rappel: loi de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma = E\,\varepsilon}$$

Force/surface (N/m^2 = Pa)



déformation relative ε [sans unités]

ΔL / L

σ: contrainte [Pa]
ε: déformation relative
E: module de Young [Pa]

Dans ce cours, que des déformations élastiques!

Lien: Contrainte – Déformation relative

Contrainte:
$\sigma = N/A$
force / surface

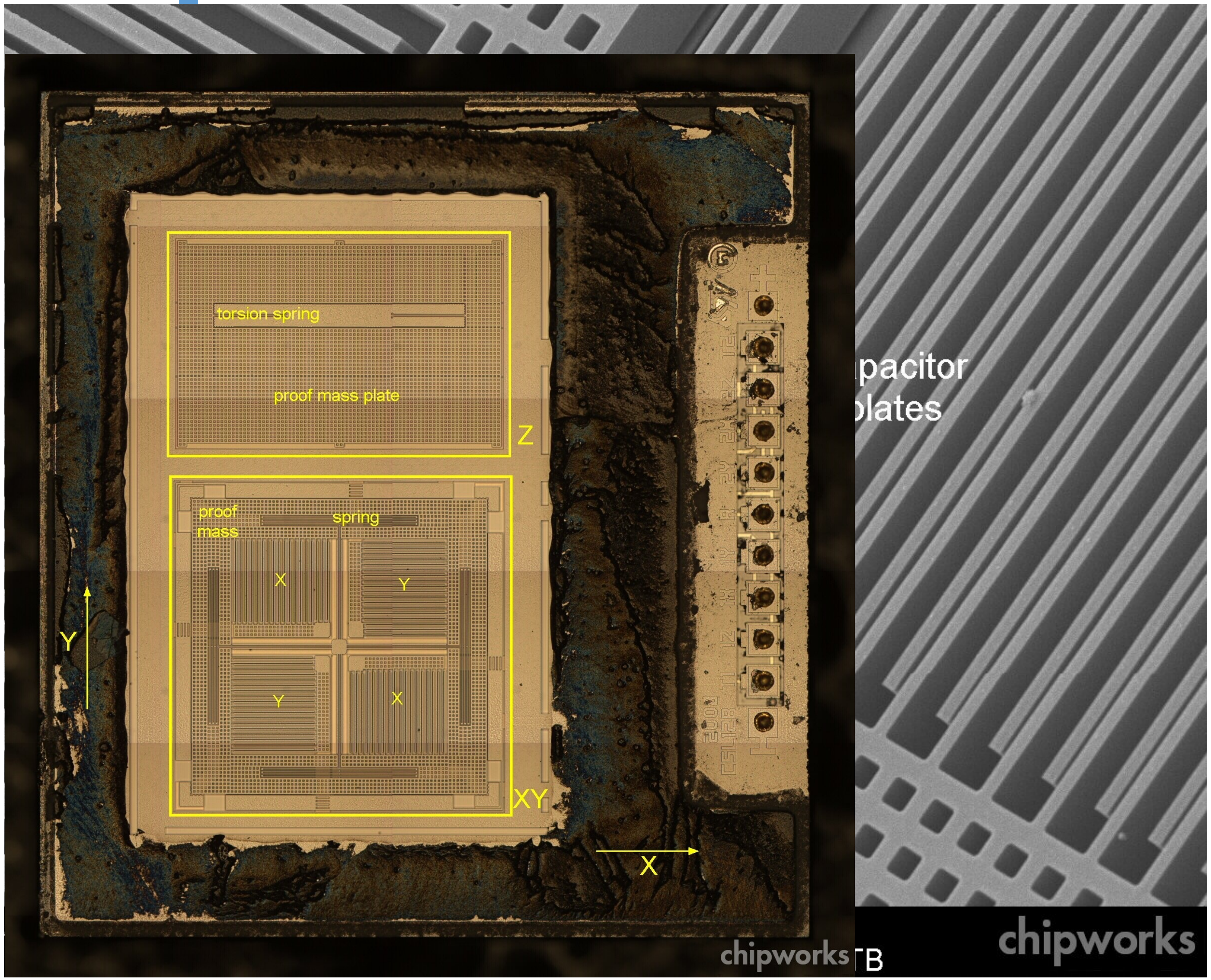
Hooke's law

$\boldsymbol{\sigma = E\varepsilon}$

Déformation relative
$\varepsilon = \Delta L / L$

Déformation: ΔL

Example: Accéléromètre MEMS



Conception d'un accéléromètre en silicium.

1. Survivre à chocs de 1000 g

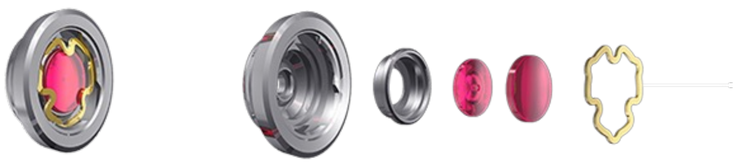
2. Mais mesurer accélération de 0.002 g

3. Choisir géométrie pour avoir rigidité assez faible pour mesurer faibles accélérations, tout en étant assez fiable, et avec une géométrie compatible avec les procédés de micro-usinage.

ST micro accelerometer

Exemple: Montre mécanique

composants résistants au chocs mécaniques



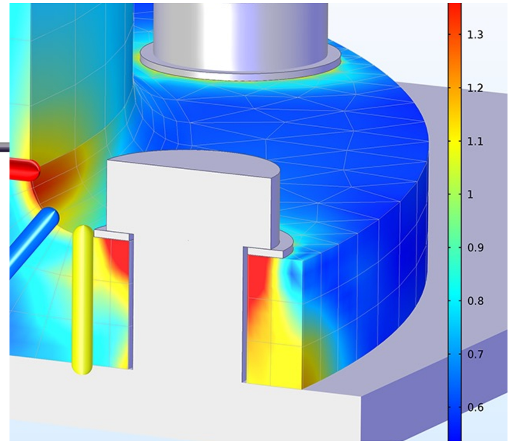
Incabloc shock absorber

Conception pour survivre à une chute de 1 m

1. Déterminer accélération critique (1000 g)

2. Choisir géométrie (rigidité) et matériau (module de Young) pour ne pas dépasser limite d'élasticité (calcul de forces internes)

Limitations de notre approche



L'approche que nous montrons permet de dimensionner beaucoup d'éléments, mais:

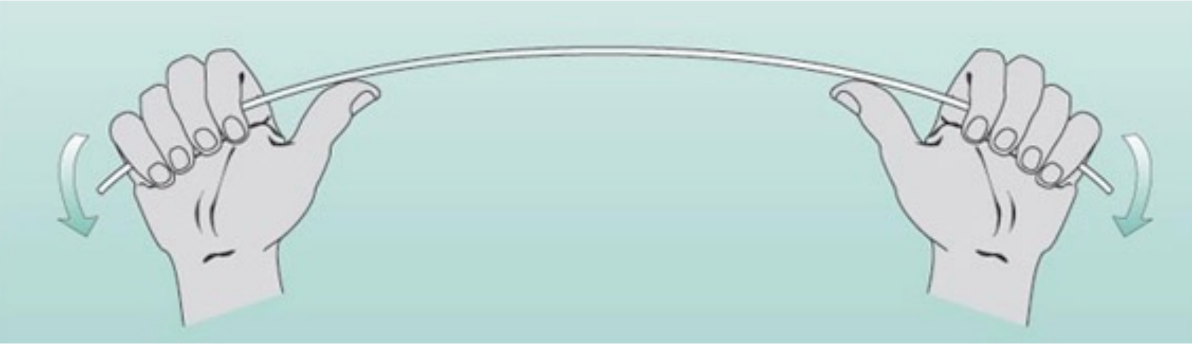
- Pour certains systèmes plus complexe, il faudra se tourner vers le Finite Element Modelling (FEM) comme Comsol, ANSYS, etc
- ne tient pas compte de déformation plastique, de fatigue, d'effets non-linéaires…
- Ce sera à vous de juger si les hypothèses et les simplifications sont acceptables…

"Tout ce qui est simple est faux, tout ce qui n'est pas simple est inutilisable."
Paul Valéry

Hypothèses 1/2

- Régime élastique linéaire:
  - aucune déformation plastique
  - pas d'effets non-linéaires

- Petites déformations:
  - déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.

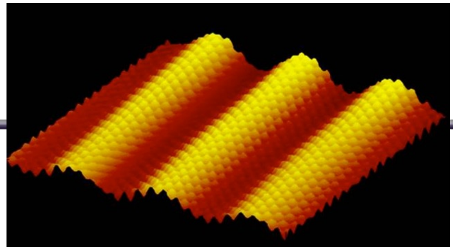


Élastomères en régime non-linéaire

https://youtube.com/shorts/B_pDZi0kxKw

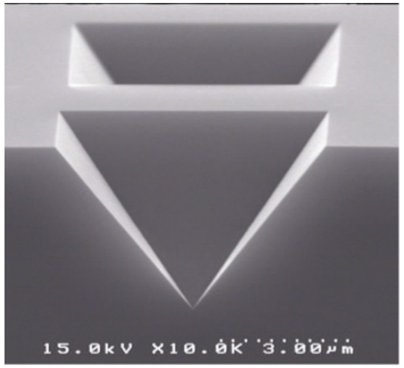
La grande majorité des matériaux ne subissent que de petites déformations relatives, max 1-2 % (sauf élastomères)

Hypothèses 2/2



- Continuité:
  - matière continue (nous ignorons la structure à l'échelle des atomes, de molécules…)

- Homogénéité:
  - propriétés mécaniques sont les mêmes en tout point du solide (pas de composites)



- Isotropie:
  - propriétés identiques dans toutes les directions

Semaine 1b2

Contraintes en 1D

Pour le moment, purement axiale

- pas de torsion (semaine 5)
- pas de flexion (semaine 7)

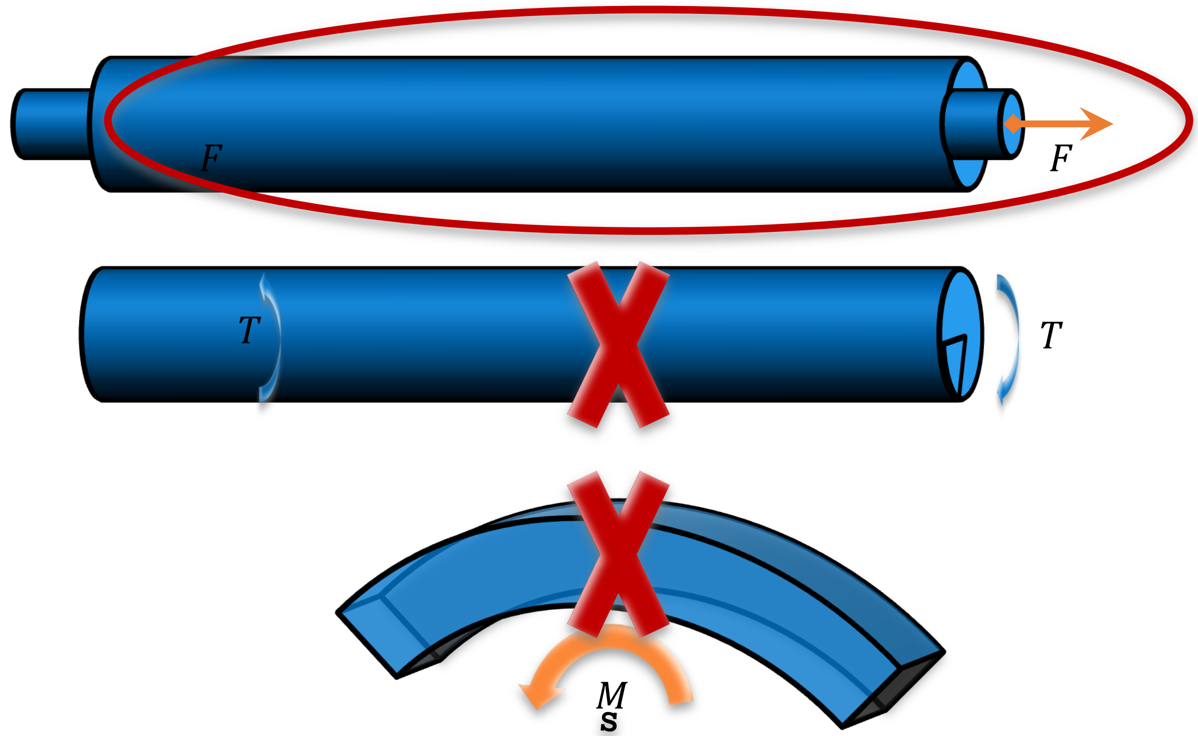
voir chapitre 1 de Gere et Goodno

Objectifs d'apprentissage de ces slides sur les **Contraintes en 1D**

- Savoir Dessiner les **contraintes internes** et les calculer en 1D
- Utiliser la méthode des sections
- Maitriser la Différence entre **contraintes en Traction** (positives) et en **Compression** (négatives)
- Savoir définir et calculer **Contrainte Normale** vs. **Contrainte en Cisaillement**
  - Contraintes normales sont <u>perpendiculaires</u> à la surface sur laquelle elles agissent
  - Contraintes en cisaillement sont <u>parallèles</u> à la surface sur laquelle elles agissent

Intro

Dans ce chapitre (contraintes 1D) , nous n'étudierons que des déformations axiales (élongation)



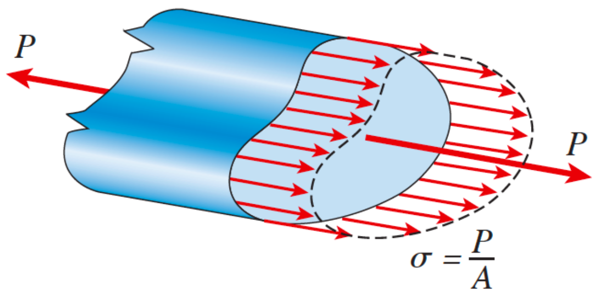
Déformation axiale

Torsion (semaine 5)

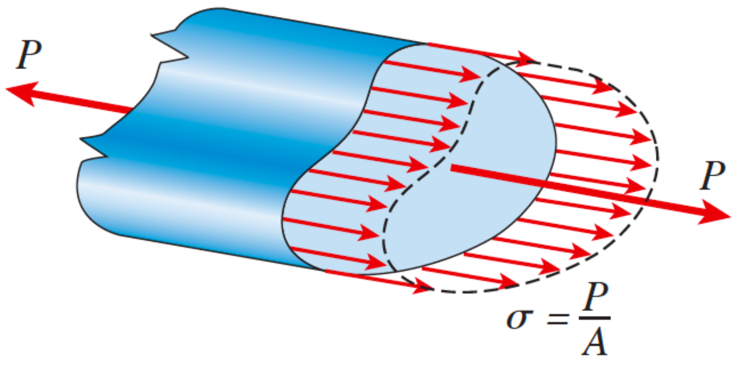
Déformation (semaine 7)

Vocabulaire

Barre Prismatique:	Poutre de section (arbitraire) constante sur toute sa longueur
Force axiale:	Une force dirigée le long de l'axe de la barre, mettant la barre en compression *ou* en traction
Force de traction:	Force qui étire la barre
Force de Compression:	Force qui comprime la barre



barre prismatique = barre à section constante



figures de Gere and Goodno

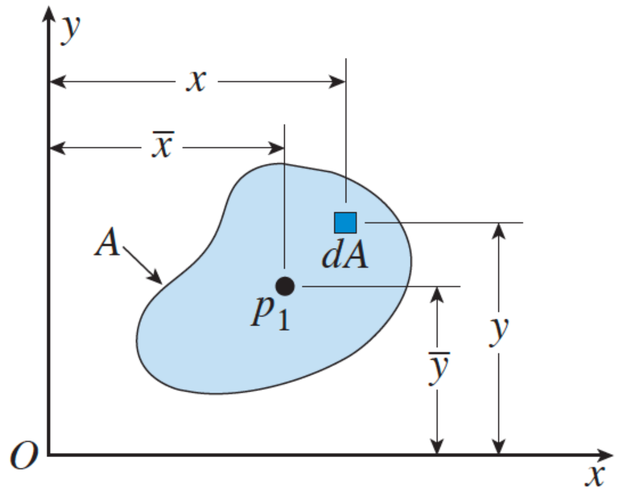
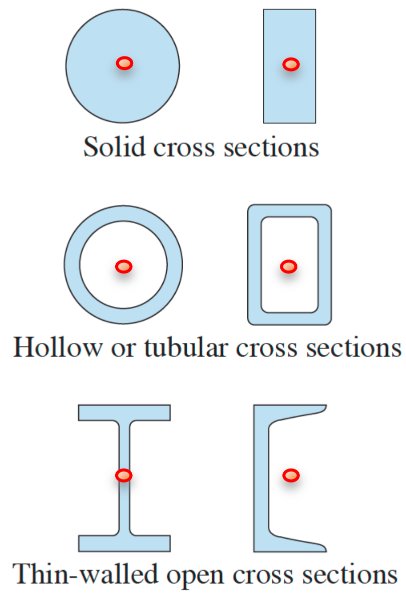


Fig. 2-4

Typical cross sections of structural members



$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \qquad \bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A}$$

Pour l'instant, nous appliquerons la force au centre p_1 de la section, afin d'avoir une déformation purement axiale (sans flexion, voir semaine 7...)

Vocabulaire

Forces Internes:

- Forces **dans** un objet suite à l'application de forces et/ou moments externes (par exemple une charge ou un couple).

- Physiquement: les forces (par ex liens intermoléculaires) qui font que l'objet garde sa forme

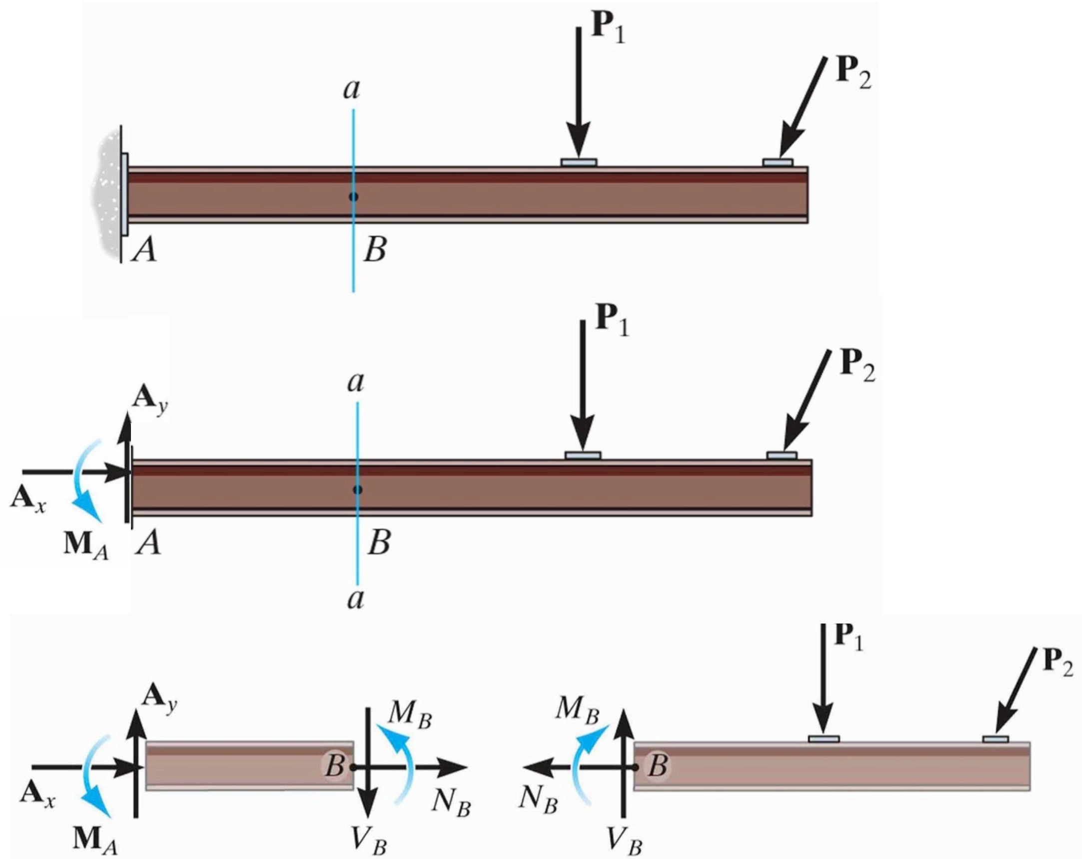
Contrainte: Intensité moyenne des forces internes (plus simplement, si uniforme: la force divisée par la surface)

Contrainte Normale : Contrainte perpendiculaire à une section

Contrainte en Cisaillement: Contrainte parallèle à une section

FORCES INTERNES: méthode des sections

Quelles sont les forces internes au point B?



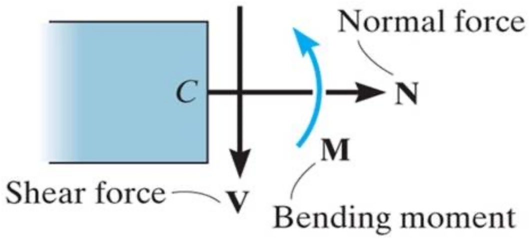
1. D'abord trouver les réactions des supports (donc diagramme des forces, mais pas encore de sous-systèmes!)

2. « couper » virtuellement la poutre au point B pour faire apparaître les forces internes

3. Dessiner diagramme des forces des sous-systèmes au point B

4. Résoudre chaque sous-sys. avec $\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$

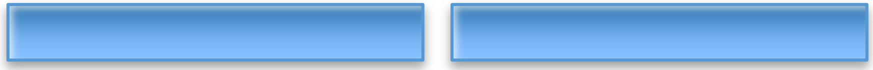
FORCES INTERNES



En 2D (plan) les contraintes internes sont:

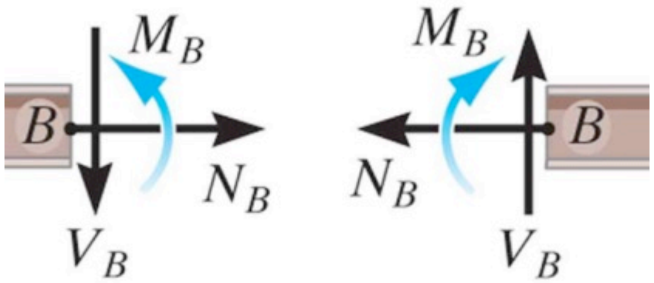
- Force de Traction (*normal force*) $\vec{N}$
- Force de Cisaillement (*shear force*) $\vec{V}$
- Moment de Flexion (*bending moment*) $\vec{M}$

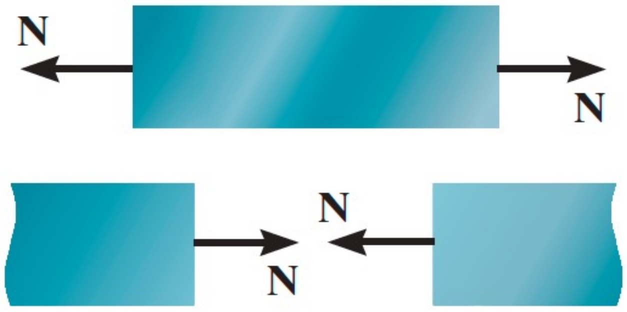
Force de Traction (*normal force*) $\vec{N}$



Force de Cisaillement (*shear force*) $\vec{V}$

Moment de Flexion (*bending moment*) $\vec{M}$





Positive normal force

Convention de signes pour les forces axiales:

- **On dessine toujours N vers l'extérieur de la coupe**
- **La force N axiale est <u>positive</u> si elle met en <u>traction</u>, négative pour la compression**

- Si vous trouvez un scalaire négatif, c'est simplement que le vecteur est dans le sens contraire de celui que vous avez dessiné

(on reviendra aux conventions pour les forces de cisaillement et moments plus tard)

Contraintes axiales
de forces externes à contraintes

Traction vs. Compression

Soumis à une charge axiale, une barre sera:

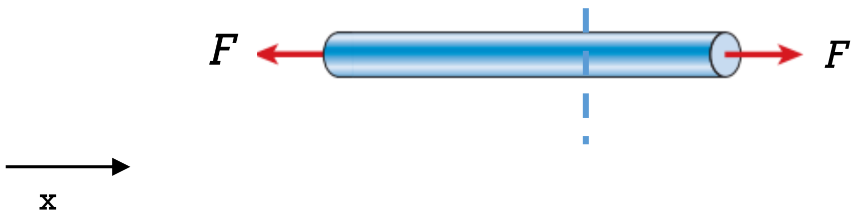
- soit en **traction**,
- soit en **compression**

  - Barre étirée par la force externe F: Traction
  - Barre comprimée par la force externe F : Compression

Colonnes en compression

Supports métalliques en traction

Forces Internes d'une barre soumise à une force axiale F



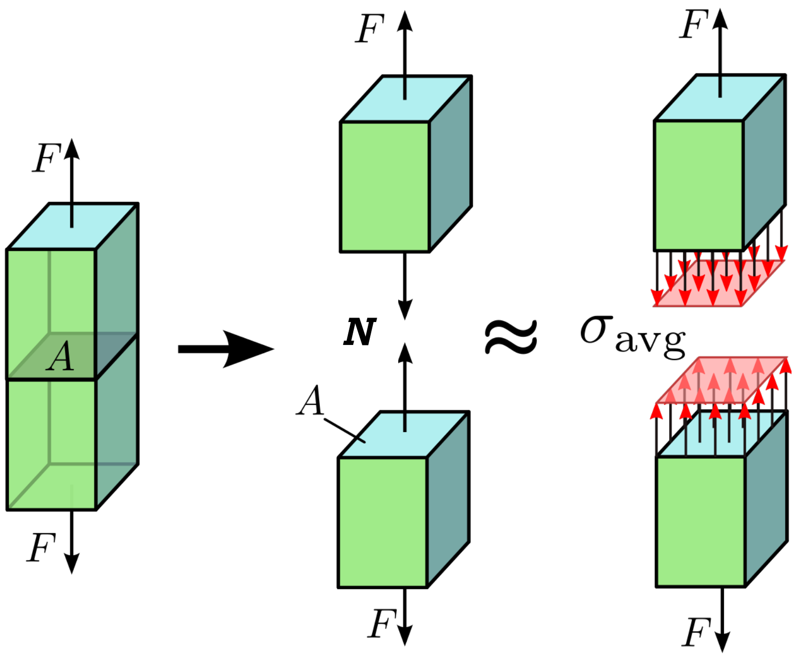
La force externe F mène à une force interne *N*

<u>par convention (svp l'utiliser!):</u>
<u>N sort des faces externes de chaque coupe</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \sum Fx &= 0 \\ -F + N &= 0 \\ N &= F \end{aligned}}$$

- des forces externes de traction génèrent une contrainte en **traction** (**positive**, par convention)
- des forces externes en compression génèrent une contrainte en **compression** (**négative**, par convention)

De forces internes à contraintes normales



N: force interne
σ: contrainte interne

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A_{\perp}} \quad \text{N/m}^2 \text{ ou Pa}}$$

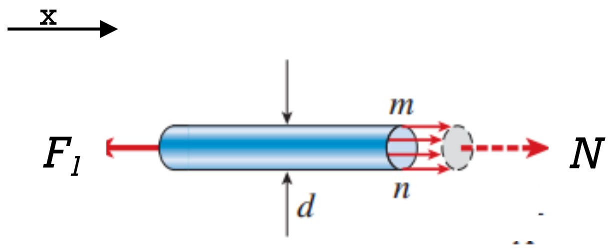
Attention: la force $\vec{N}$ et la section $\vec{A}$ sont des vecteurs:
La contrainte dépend de leur orientation.

La contrainte tient compte de la section de la barre.
Hypothèse importante: la force interne est uniforme sur la section de la barre

Une force donnée n'aura pas le même effet sur des barres de section différentes

Convention des signes pour la contrainte

Rappel: les forces normales "internes" doivent être dessinées comme **sortant** des faces des coupes

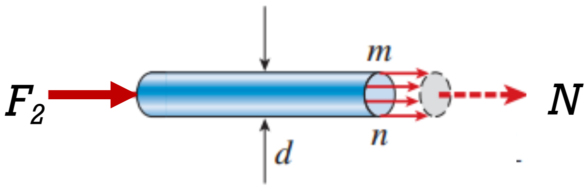


$$-F_1 + N = 0 \Rightarrow N = F_1 = 100 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = 100/A \quad \text{(Pa)}$$

σ>0 , donc en Traction

F = 100 N



$$F_2 + N = 0 \Rightarrow N = -F_2 = -100 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = -100/A \quad \text{(Pa)}$$

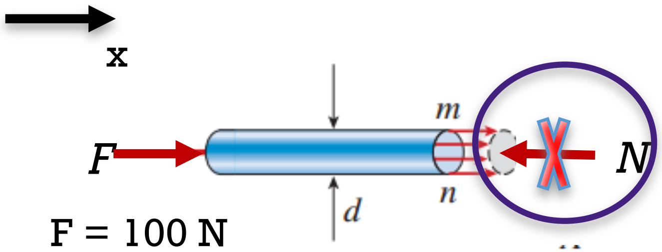
σ <0, donc en Compression

La force n'est pas nécessairement dessinée dans la direction physique (car N peut être négatif)

Convention des signes pour contraintes

Rappel: les forces normales "internes" doivent être dessinées comme **sortant** des faces des coupes

ici, mauvaise convention !!! mènera à interprétation erronée du résultat



$$F - N = 0 \Rightarrow N = F = 100\ N$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = 100/A \ \text{(Pa)}$$

Positif -> en traction

mais devrait être négatif car en compression!

Pour les forces de réaction, dessinez les forces dans le sens qui vous plait (puis trouver par calcul si positif ou négatif et interpréter)

Mais pour N, dessinez N qui sort de la coupe. Sans quoi, vous ne pourrez pas utiliser le signe de N pour compression / traction

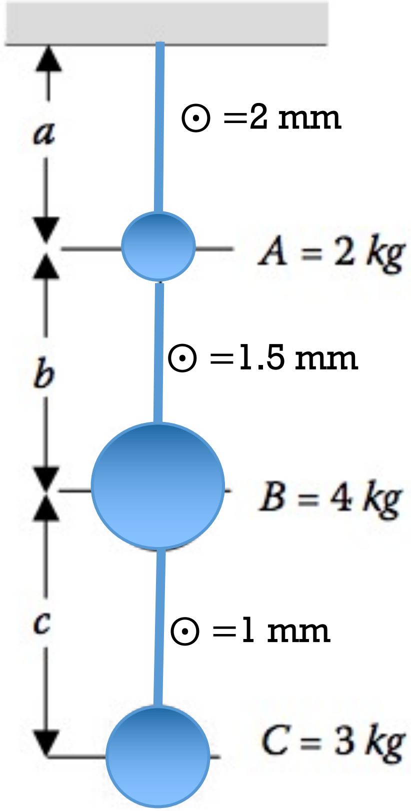
Exemple

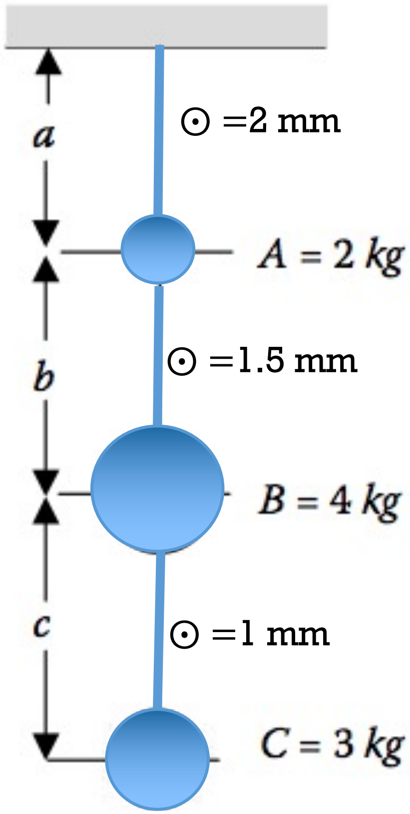
contrainte dans un câble

- 3 boules sont suspendues par 3 câbles de même longueur (*a*=*b*=*c*)
- La masse des boules est 2 kg, 4 kg, et 3 kg (de haut en bas).
- Le diamètre des câbles est 2 mm, 1.5 mm, et 1 mm.

a) Dans quel câble la contrainte est-elle la plus élevée? (prendre $g=10\ ms^{-2}$)

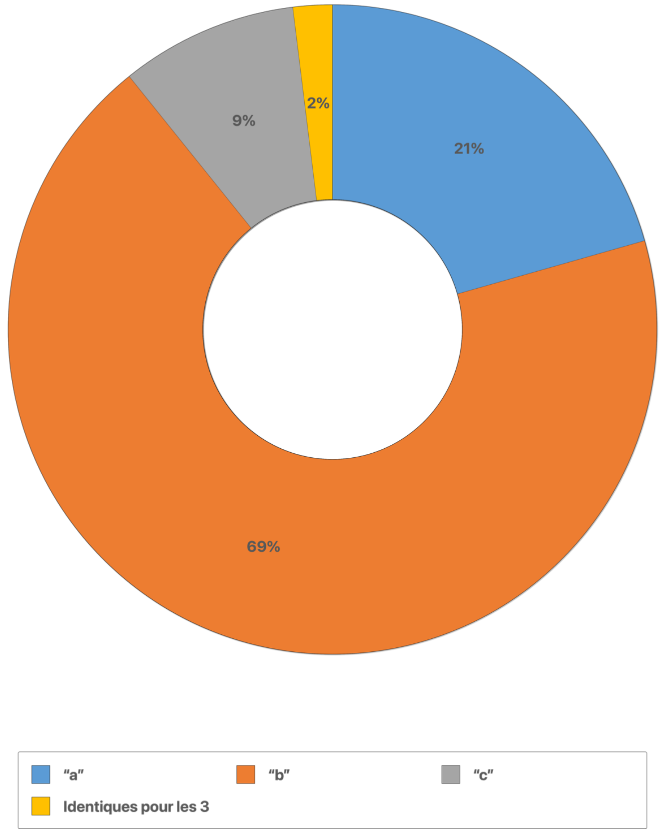
b) dans quel ordre faudrait-il suspendre les boules pour minimiser les contraintes dans les câbles?



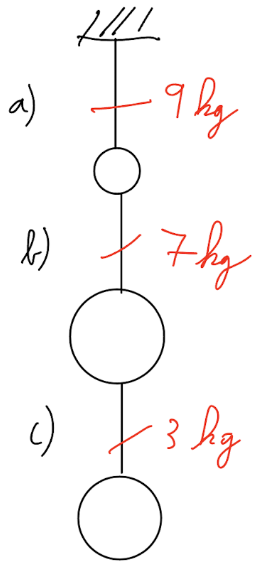


Dans quel Cable a-t-on la contrainte max ?

A. "a"
B. "b"
C. "c"
D. Identiques pour les 3



- Dans b



a : $F_a = 90\,N$

$\sigma = \frac{F_a}{A_a}$ $\quad A = \pi r^2$

$r = 10^{-3}$

$\sigma = \frac{90}{\pi\, 10^{-6}} = \frac{9 \cdot 10^7}{\pi}$

$= 2.86 \times 10^7$ Pa

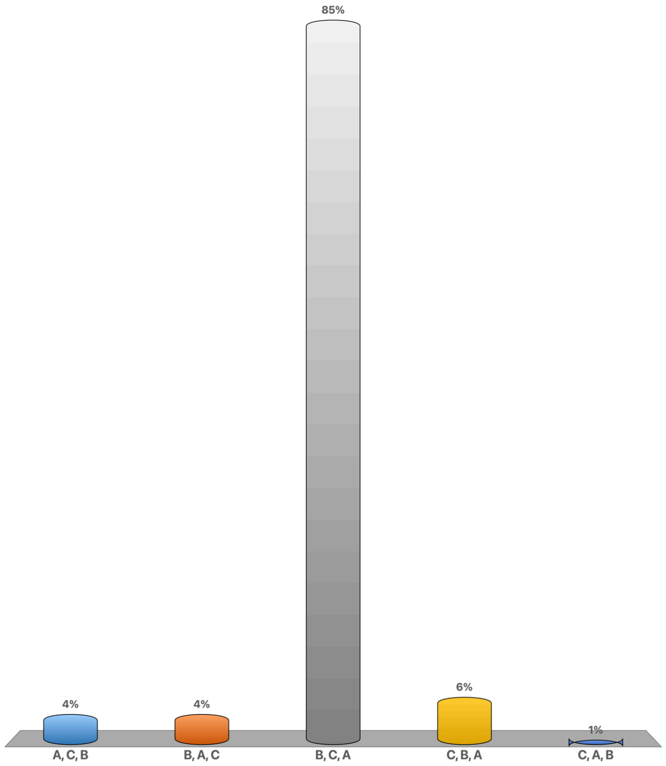
b : $\sigma = \frac{F_b}{A_b} = \frac{70}{\pi\,(0.75)^2 \cdot 10^{-6}} = 3.96 \times 10^7$ Pa

c : $\sigma = \frac{F_c}{A_c} = \frac{30}{\pi\,(0.5)^2\, 10^{-6}} = 3.82 \cdot 10^7$ Pa

a : 28.6 MPa
b 39.6 MPa
c 38.2 MPa

Comment placer les balles pour minimiser la contrainte max dans les câble? (les câbles restent 2 mm, 1.5mm, et 1 mm de diamètre)

1. A, C, B
2. B, A, C
3. B, C, A
4. C, B, A
5. C, A, B



Option 3: B. C. A

On met la plus grande masse au dessus, pour avoir moins de contraintes sur les cables dessous

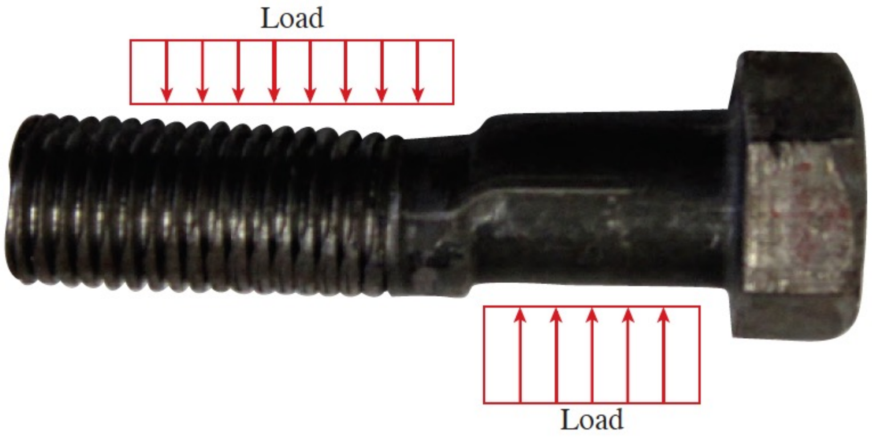
Limitations des calculs précédents

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \text{N/m}^2 \text{ ou Pa}$$

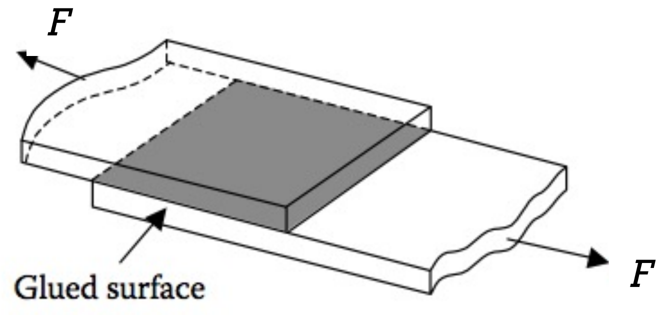
- Valable seulement si la contrainte est uniformément distribuée sur la section
- Il faut donc que :
  - la force axiale *F* passe par le centre de masse de la section
  - Le matériau soit homogène
- Si *F* ne passe pas par le centre de masse, la barre peut plier, voir semaine 7

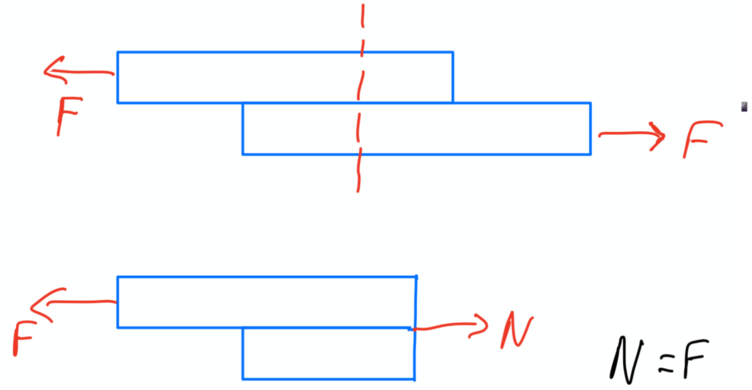
- Sauf info contraire, les forces axiales sont appliquées aux centres des sections

Contraintes en Cisaillement



Cisaillement

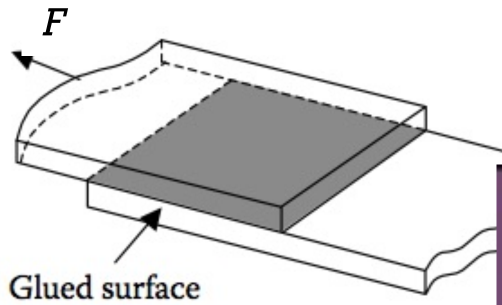


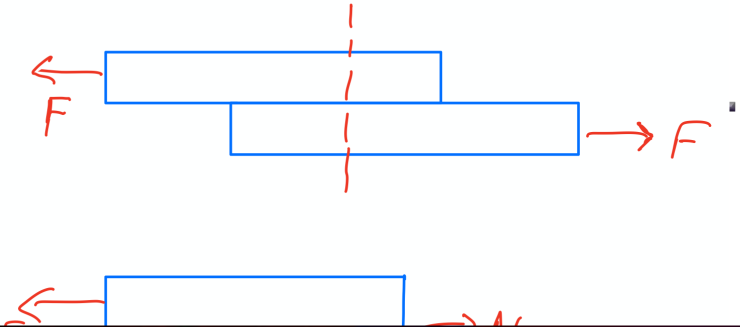


Comment est-ce que ça peut casser si on tire?

- Soit le bois se déchire car ne tient pas la contrainte axiale
- Soit par cisaillement, la colle lâche et les plaques se désolidarisent

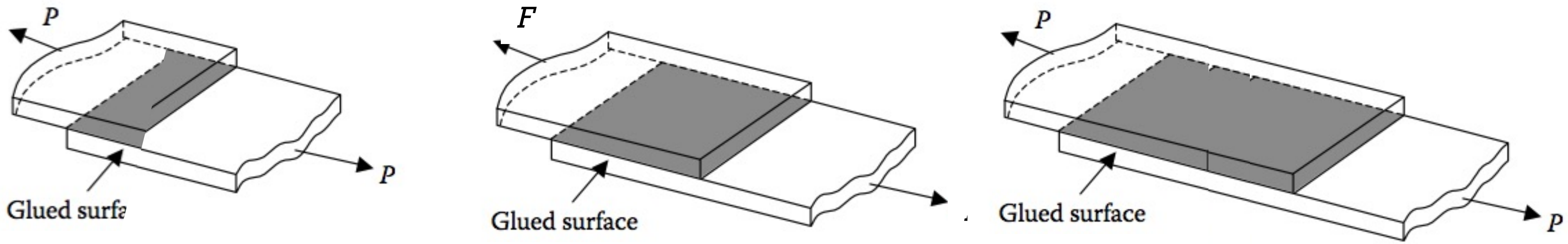
Cisaillement

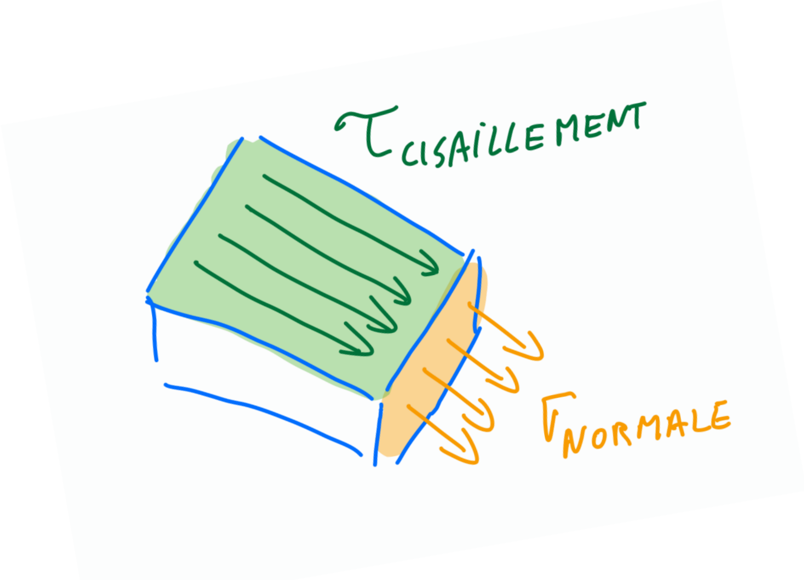




Comment est-ce que ça peut casser si on tire?

- Soit le bois se déchire car ne tient pas la contrainte axiale
- Soit par cisaillement, la colle lâche et les plaques se désolidarisent


P
Glued surfa
P
F
Glued surface
P
Glued surface
P

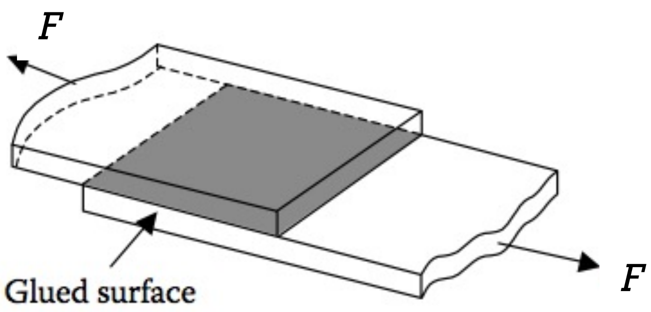

τ CISAILLEMENT
σ NORMALE

Contraintes en cisaillement

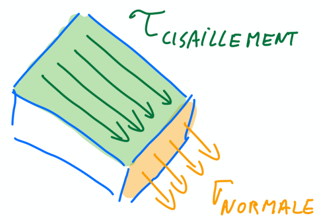
Les contraintes en cisaillement sont <u>parallèles</u> à la surface sur laquelle elles agissent

- Surface A est parallèle à la force externe F *(et aussi à la force interne N)*
- Contrainte en cisaillement τ sur la surface A:

$$\boxed{\tau \equiv \frac{N}{A_{||}}}$$



Ici, la surface $A_{\|}$ est la surface en gris, collée



Contraintes 1D - résumé

- Contrainte normale

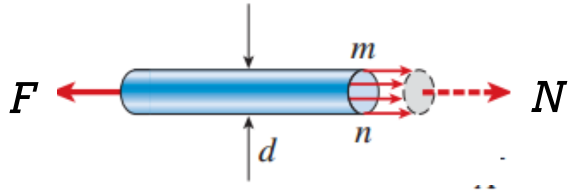
$$\sigma = \frac{N}{A_\perp}$$

en [N/m²] ou [Pa]

- Contrainte en cisaillement

$$\tau \equiv \frac{N}{A_{||}}$$

Rappel: les forces normales "internes" doivent être dessinées comme **sortant** des faces des coupes



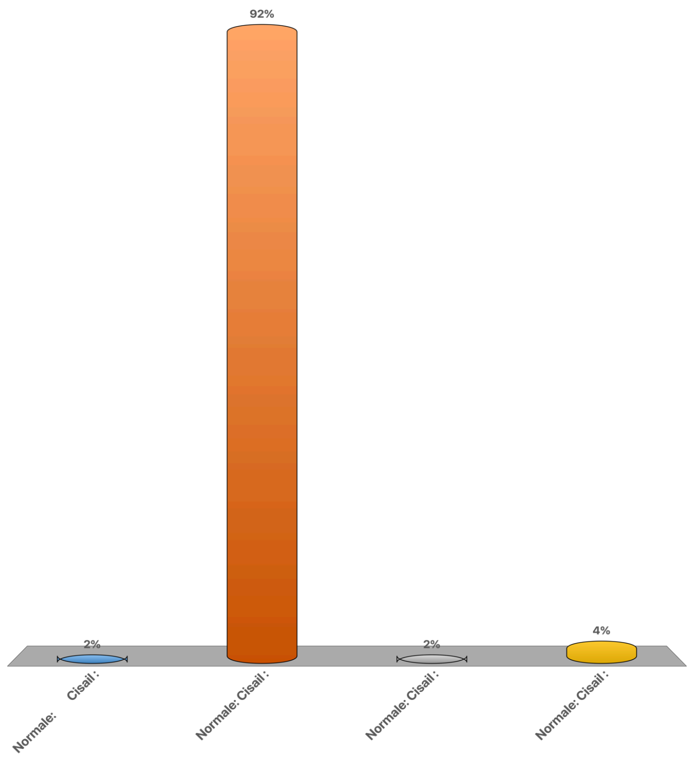
Convention: Traction: positif

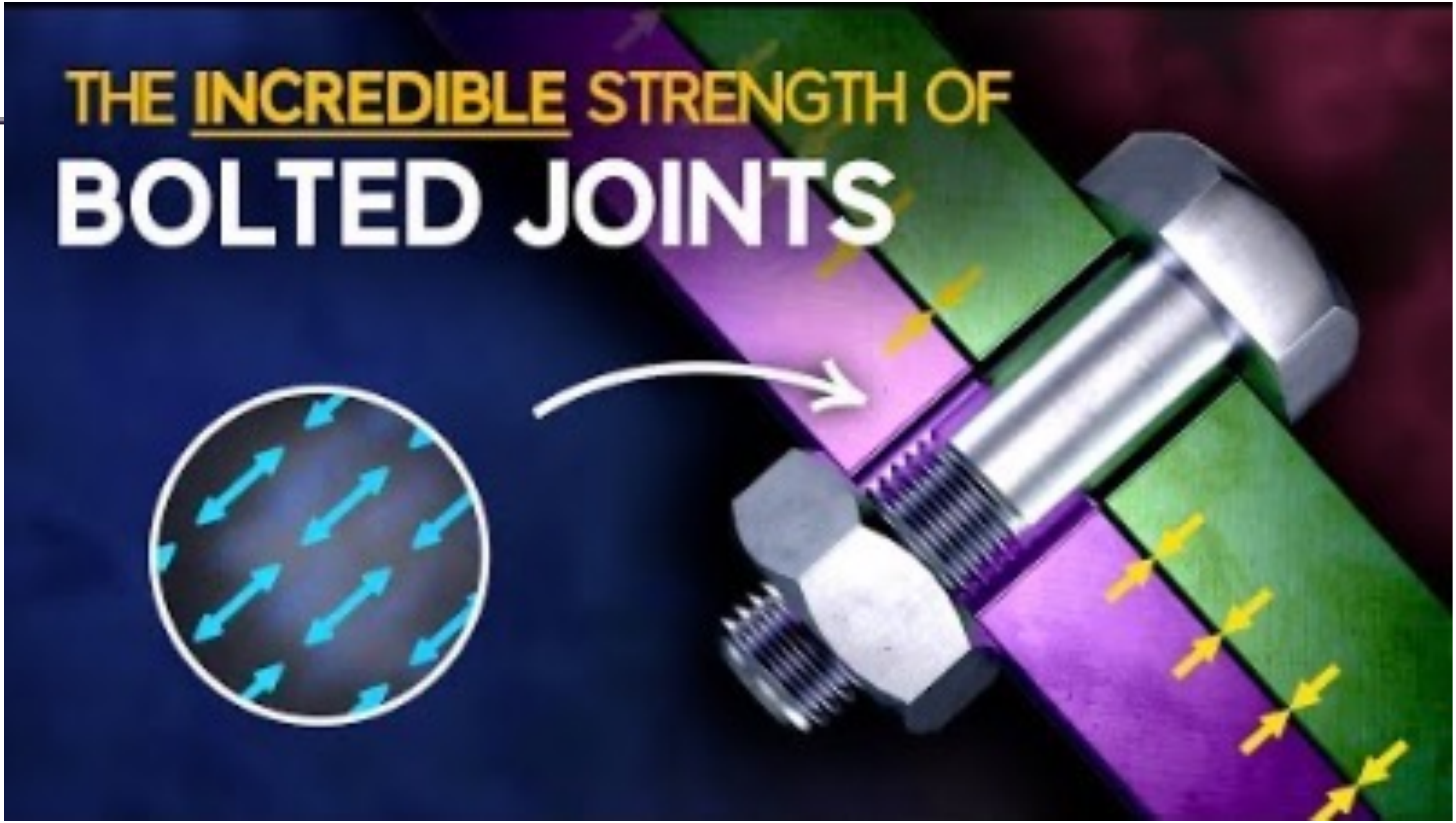
Compression: négatif

Question quizz

Quelle est l'orientation de la force interne par rapport à la section pour contraintes normales et contraintes en cisaillement ?

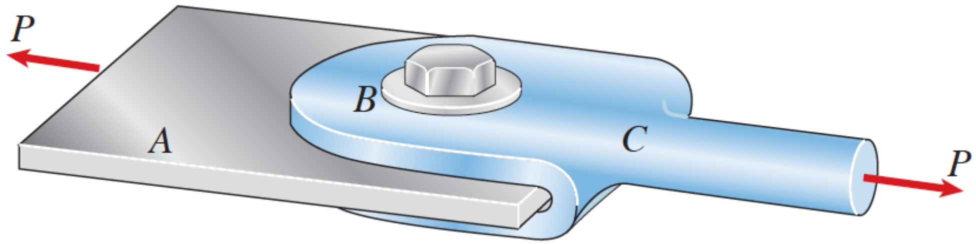
A. Normale: $\parallel$ Cisail : $\parallel$
B. Normale: $\perp$ Cisail : $\parallel$
C. Normale: $\perp$ Cisail : $\perp$
D. Normale: $\parallel$ Cisail : $\perp$





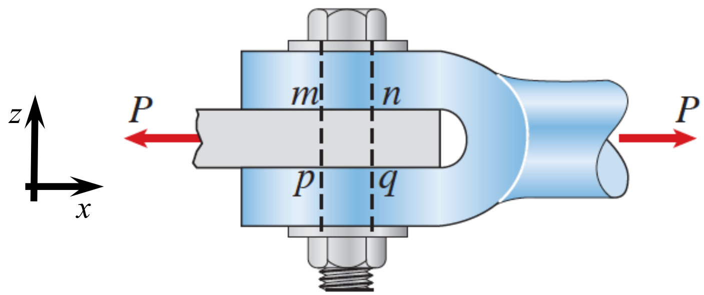
https://www.youtube.com/watch?v=XLzTB4KLCxU

https://www.youtube.com/@TheEfficientEngineer figure 1.46 de Gere et Goodno



double cisaillement du boulon

- distribution de contraintes?
- Quelle surface $A_{\parallel}$?



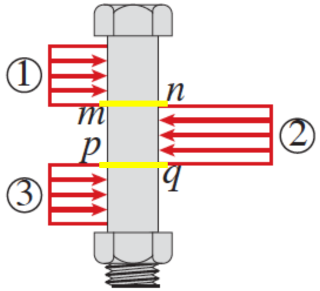
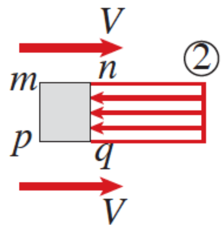
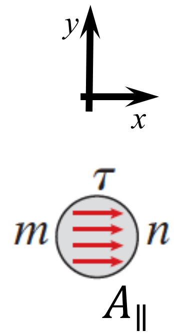


Diagramme
des forces du
boulon
Vu de coté

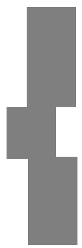


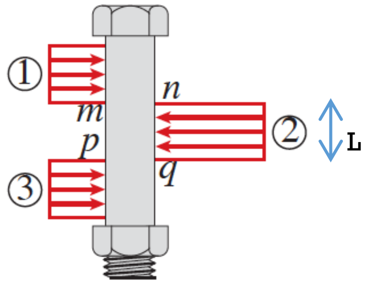
Vu de coté
mettre en évidence
les forces internes à
la surface où le
cisaillement a lieu

$V = P/2$

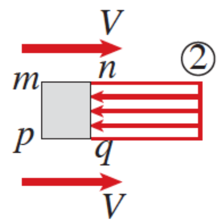


Vu de dessus
Contraintes de
cisaillement τ

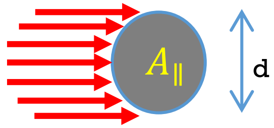




de coté



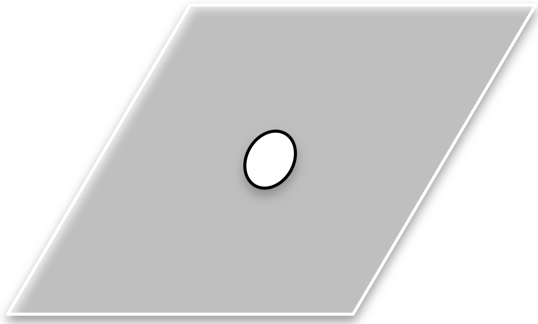
de coté



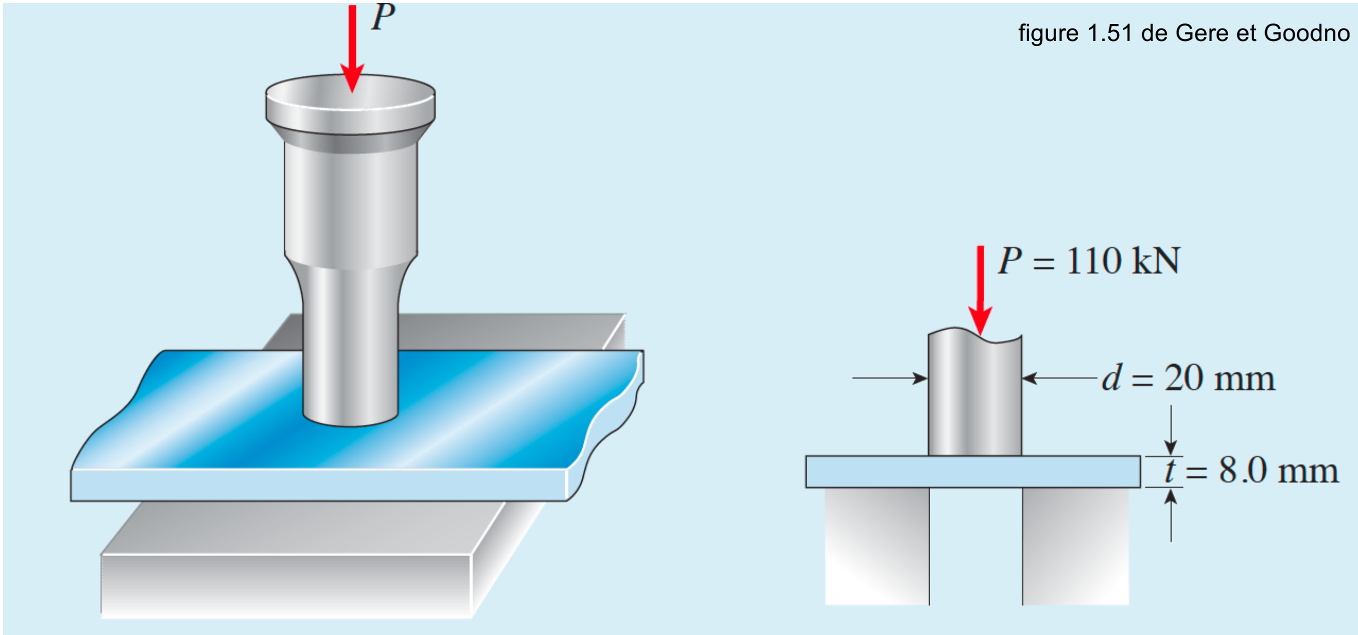
de dessus

- Des approximations sont nécessaires pour permettre un calcul simple
  - Nous allons négliger la concentration de contraintes, et prendre comme simplification que la *contrainte est uniformément distribuée*.
  - Les forces sont distribuées sur le boulon cylindrique: nous approximons ceci comme une force uniforme sur surface L.d (d= diamètre), en gros comme si le boulon était rectangulaire
  - $\tau = \dfrac{V}{A_{\|}} = \dfrac{P/2}{A_{\|}}$

quizz



Plaque grise avec un trou



a) calculer la contrainte <u>normale</u> dans la plaque bleue causé par la force P sur le poinçon

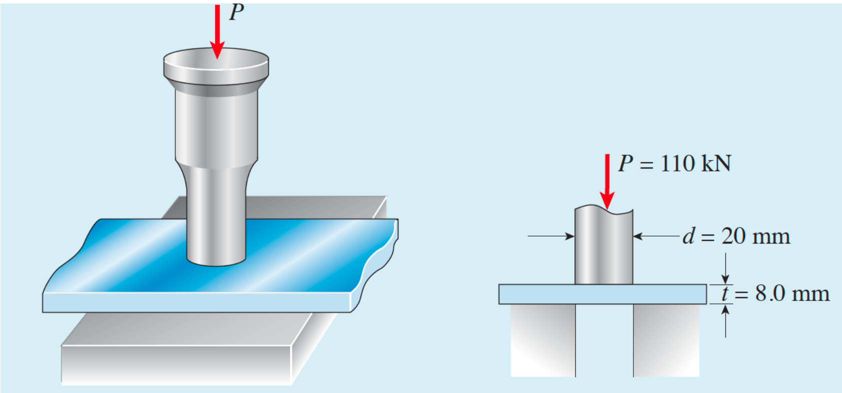
b) calculer la contrainte en <u>cisaillement</u> dans la plaque bleue

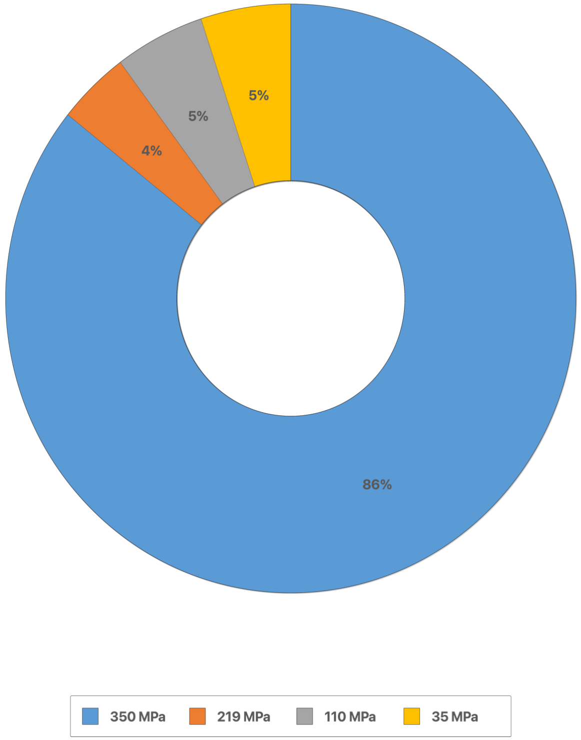
indice: commencer par trouver

1. la surface pour contrainte normale = (facile)
2. la surface pour cisaillement = surface // à la force

Quelle est la Contrainte normale?

A. 350 MPa
B. 219 MPa
C. 110 MPa
D. 35 MPa

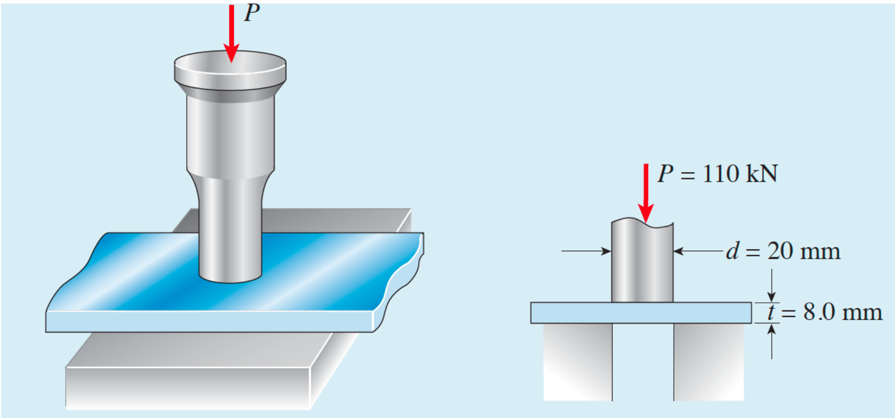


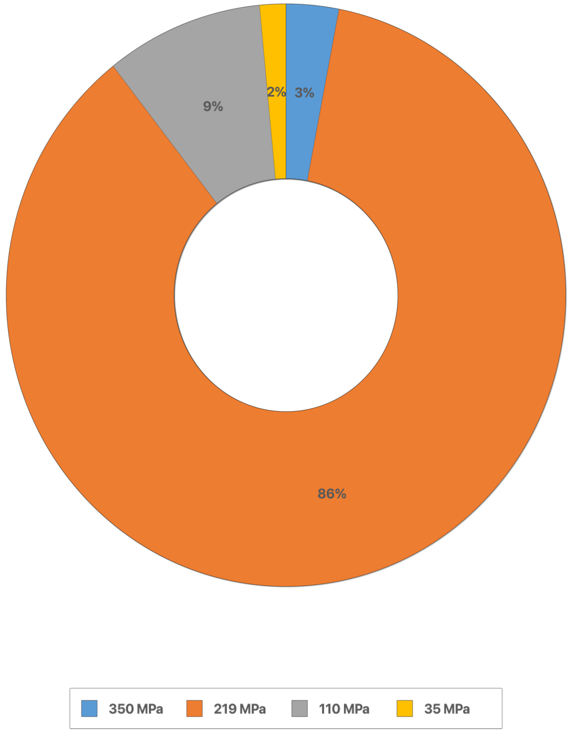


(contrainte en compression, navré, devrait être négatif. Réponse = -350 MPa)

Quelle est contrainte en cisaillement ?

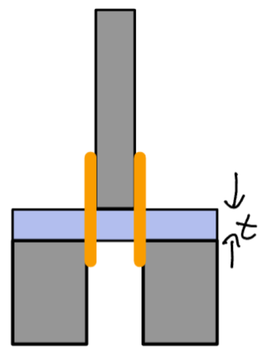
A. 350 MPa
B. 219 MPa
C. 110 MPa
D. 35 MPa





- normale: 350 MPa
  - surface = 3.14×10^{-4} m^2

- cisaillement: 219 MPa
  - surface = 5×10^{-4} m^2 = $2.\pi.r.\ h$

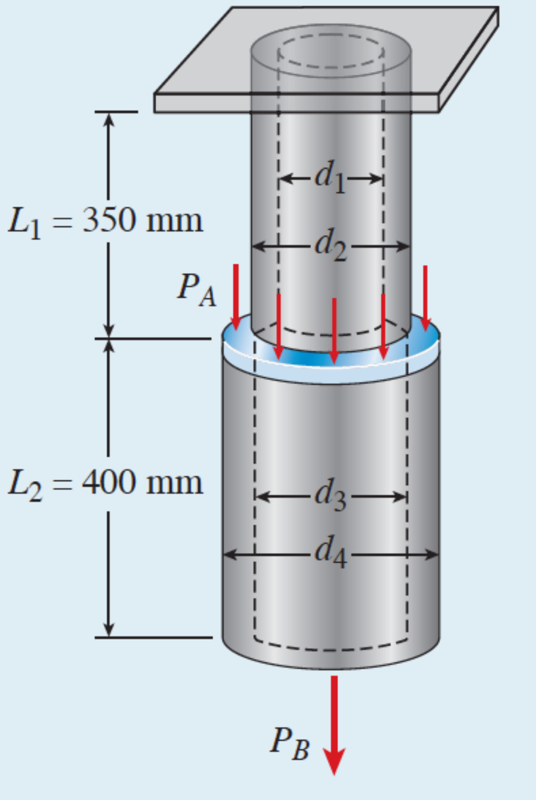


$$A_{parallèle} = 2\pi\, r\, t$$

Exemple résolu, contrainte normale

Fig. 1-23

Example 1-5: Two-tier hanging pipe stress analysis



d_1= 51 mm
d_2= 60 mm
d_3= 57 mm
d_4= 63 mm

P_A= 7800 N
P_B= ?

Nous négligeons la masse des tuyaux

On impose deux forces P_A et P_B

P_A = 7.8 kN

P_B = ? *Sera à vous de trouver*

a) Trouvez P_B telle que la contrainte dans le tuyau supérieur soit 14.5 MPa.

b) Quelle contrainte avons-nous alors dans le tuyau du bas?

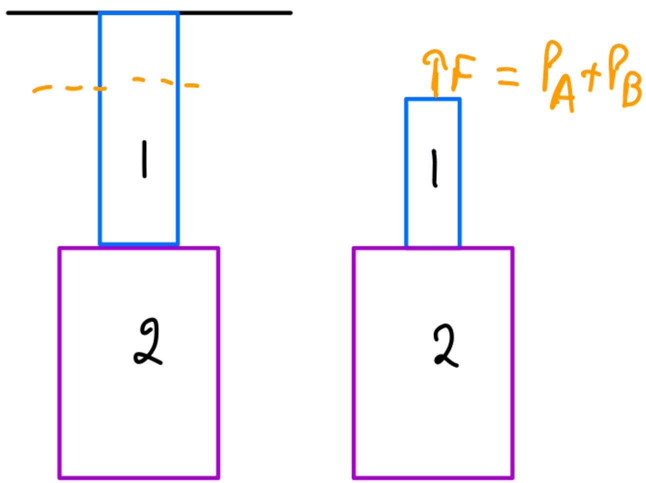
c) Trouvez P_B telle que la contrainte dans les deux tuyaux soit la même

d) Trouver les contraintes dans les deux tuyaux pour les charges du cas c) si l'allongement du tuyau supérieur est 3.56 mm, et le *déplacement* du bas du tuyau inférieur est 7.63 mm

$$\sigma_N = \frac{F}{A_\perp}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right)$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}\left(d_4^2 - d_3^2\right)$$



$$\boxed{\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_1}} \quad (1)$$

$$P_B = A_1 \sigma_1 - P_A$$

$$= 3577 \text{ N} \quad (a)$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{P_B}{A_2} = \frac{A_1 \sigma_1 - P_A}{A_2}} \quad (2) \quad = 6.33 \text{ MPa} \quad (b)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Longrightarrow \qquad \frac{P_B}{A_2} = \frac{P_A + P_B}{A_1}$$

$$P_B = \frac{P_A}{A_1} \frac{1}{\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)} = 20\,kN$$

c

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_1} = \frac{3.56}{350} = 1.017 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta - \delta_1}{L_2} = \frac{7.63 - 3.56}{400} = 1.017 \cdot 10^{-2}$$

$=$

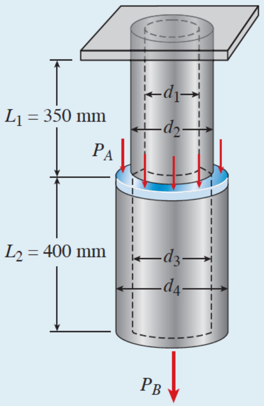
d

même matériaux, même contraintes

$\Longrightarrow$ même déformation relative

Fig. 1-23

Example 1-5: Two-tier hanging pipe stress analysis



A hollow circular nylon pipe (see Fig 1-23) supports a load $P_A = 7800$ N, which is uniformly distributed around a cap plate at the top of the lower pipe. A second load P_B is applied at the bottom. The inner and outer diameters of the upper and lower parts of the pipe are $d_1 = 51$ mm, $d_2 = 60$ mm, $d_3 = 57$ mm, and $d_4 = 63$ mm, respectively. The upper pipe has a length $L_1 = 350$ mm; the lower pipe length is $L_2 = 400$ mm. Neglect the self-weight of the pipes.

(a) Find P_B so that the tensile stress in upper part is 14.5 MPa. What is the resulting stress in the lower part?
(b) If P_A remains unchanged, find the new value of P_B so that upper and lower parts have same tensile stress.
(c) Find the tensile strains in the upper and lower pipe segments for the loads in part (b) if the elongation of the upper pipe segment is known to be 3.56 mm and the downward displacement of the bottom of the pipe is 7.63 mm.

Numerical data:

$$d_3 = 57 \text{ mm} \quad d_4 = 63 \text{ mm} \quad d_1 = 51 \text{ mm} \quad d_2 = 60 \text{ mm} \quad P_A = 7800 \text{ N}$$

$$L_1 = 350 \text{ mm} \quad L_2 = 400 \text{ mm}$$

Solution

(a) Find P_B so that the stress in the upper part is 14.5 MPa. What is the resulting stress in the lower part? Neglect self-weight in all calculations.

Use the given dimensions to compute the cross-sectional areas of the upper (segment 1) and lower (segment 2) pipes (we note that A_1 is 1.39 times A_2). The stress in segment 1 is known to be 14.5 MPa.

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = 784.613 \text{ mm}^2 \qquad A_2 = \frac{\pi}{4}(d_4^2 - d_3^2) = 565.487 \text{ mm}^2$$

The axial tensile force in the upper pipe is the sum of loads P_A and P_B. Write an expression for σ_1 in terms of both loads, then solve for P_B:

$$\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_1}$$

where $\sigma_1 = 14.5$ MPa so $P_B = \sigma_1 A_1 - P_A = 3577$ N

With P_B now known, the axial tensile stress in the lower segment can be computed as

$$\sigma_2 = \frac{P_B}{A_2} = 6.33 \text{ MPa}$$

(b) If P_A remains unchanged, find the new value of P_B so that upper and lower parts have same tensile stress.

So $P_A = 7800$ N. Write expressions for the normal stresses in the upper and lower segments, equate these expressions, and then solve for P_B.

Tensile normal stress in upper segment:

$$\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_1}$$

Tensile normal stress in lower segment:

$$\sigma_2 = \frac{P_B}{A_2}$$

Equate these expressions for stresses σ_1 and σ_2 and solve for the required P_B:

$$P_B = \frac{\dfrac{P_A}{A_1}}{\left(\dfrac{1}{A_2} - \dfrac{1}{A_1}\right)} = 20{,}129 \text{ N}$$

So for the stresses to be equal in the upper and lower pipe segments, the new value of load P_B is 2.58 times the value of load P_A.

(c) Find the tensile strains in the upper and lower pipe segments for the loads in part (b).

The *elongation* of the upper pipe segment is $\delta_1 = 3.56$ mm. So the tensile strain in the upper pipe segment is

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_1} = 1.017 \times 10^{-2}$$

The downward *displacement* of the bottom of the pipe is $\delta = 7.63$ mm. So the *net elongation* of the lower pipe segment is $\delta_2 = \delta - \delta_1 = 4.07$ mm and the tensile strain in the lower pipe segment is

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L_2} = 1.017 \times 10^{-2}$$

Note: As explained earlier, strain is a dimensionless quantity and no units are needed. For clarity, however, units are often given. In this example, ε could be written as 1017×10^{-6} m/m or 1017 μm/m.

Semaine 1b3

Déformation relative en 1D

contraintes → déformation relative → déformation → changement de forme et taille

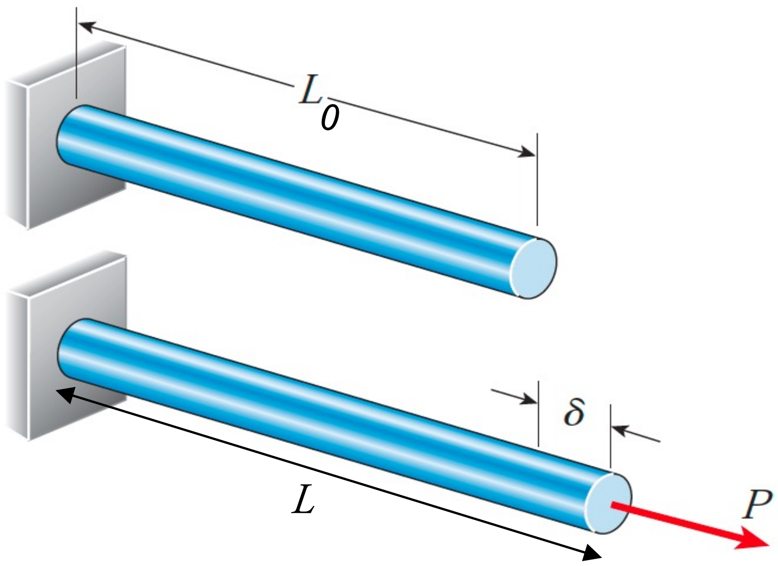
déformation → déformation relative → contraintes → forces internes

12-9-2024

Objectifs de cette courte partie (Déformations relatives en 1D)

- Définition de déformation relative
- Lien entre déformation relative et déformation.
- Loi de Hooke

Déformation relative normale (force axiale)



$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

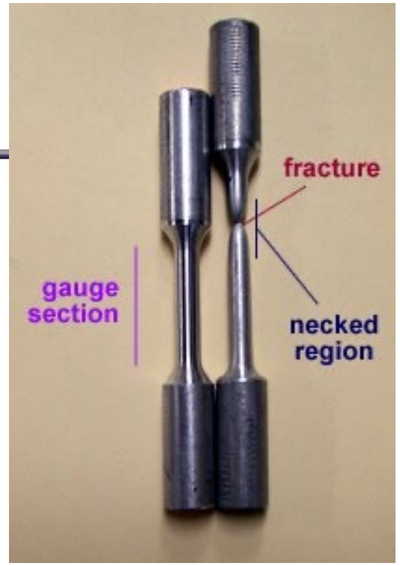
$\varepsilon > 0$ en *traction*
$\varepsilon < 0$ en *compression*

ε caractérise l' «intensité de la déformation»

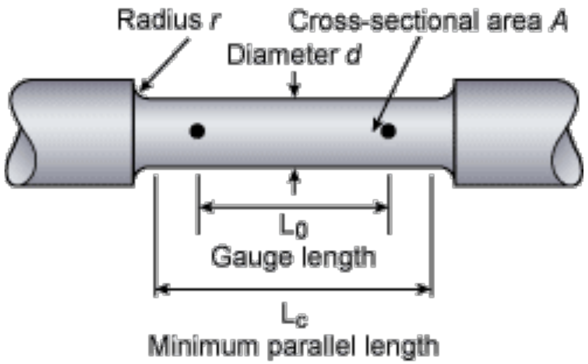
- sans unités
- peut être exprimée en: m/m, mm/mm, ou en %

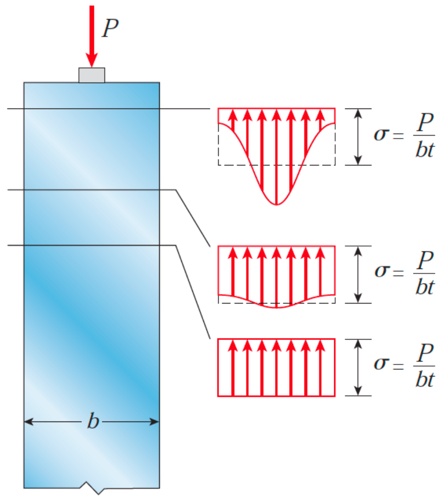
Définitions

- Déformation relative normale : déformation d'un objet parallèle à la force appliquée, divisée par sa longueur initiale
- Longueur de jauge (*gauge length*): longueur initiale non-déformée de l'objet
- forces de traction: Forces qui étirent ou allongent l'objet (valeur positive)
- forces de compression : Forces qui compriment ou raccourcissent l'objet (valeur négative)



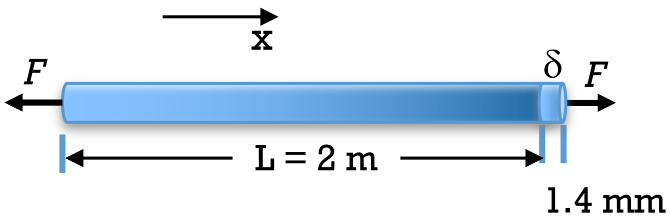
https://www.mtu.edu/materials/k12/experiments/tensile/





Exemple

Déformation relative d'une barre en acier, force de traction F



- longueur initiale : 2 m   diamètre= 1 cm
- Elongation: 1.4 mm
- Module de Young : E= 200 GPa

Déformation relative

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.4\,\mathrm{mm}}{2.0\,\mathrm{m}} = 0.0007 = 700 \times 10^{-6}$$

sans unités

en pourcentage: 0.07 %

Quelle Force faillait-il pour obtenir ces 1.4 mm d'allongement?

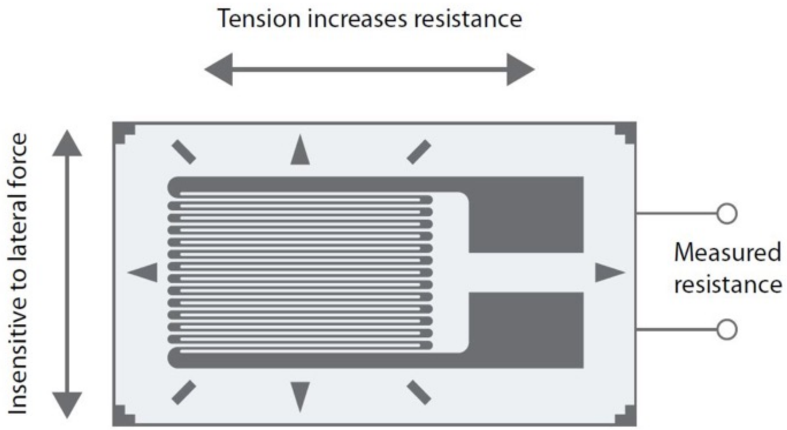
- loi de Hooke. $\sigma = E\varepsilon$ et $N = \sigma A,$ A= surface

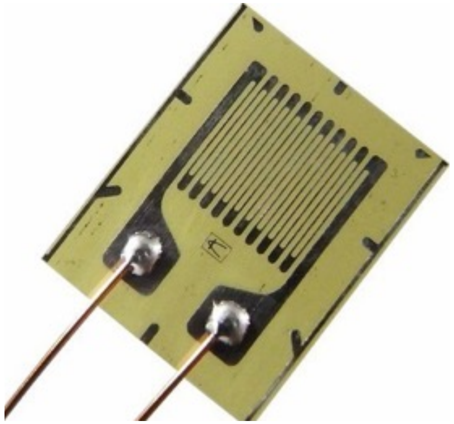
- Eq de la Statique: $F - N = 0 \Rightarrow F = N = \sigma A = E\varepsilon A$

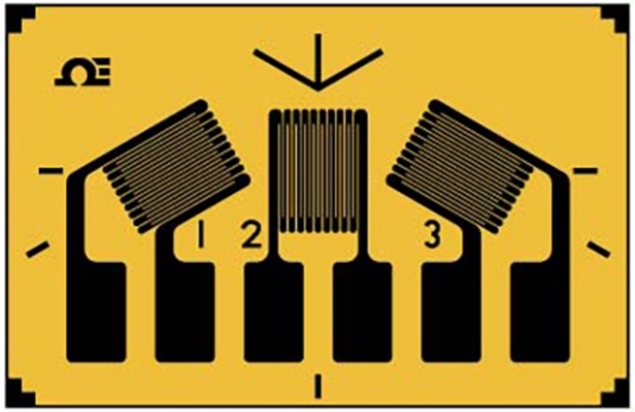
F=1100 N

Jauges de déformation Métalliques «*strain gauges* »

- Piste conductive, typiquement métal mince sur un film en polymère
- Le film est **collé** sur la pièce (corps d'épreuve) qui se déforme sous l'effet d'une force externe
- Lorsque le corps d'épreuve est soumis à une force, sa déformation est reprise par film
- Ceci provoque une **variation de la résistance** de la piste métallique

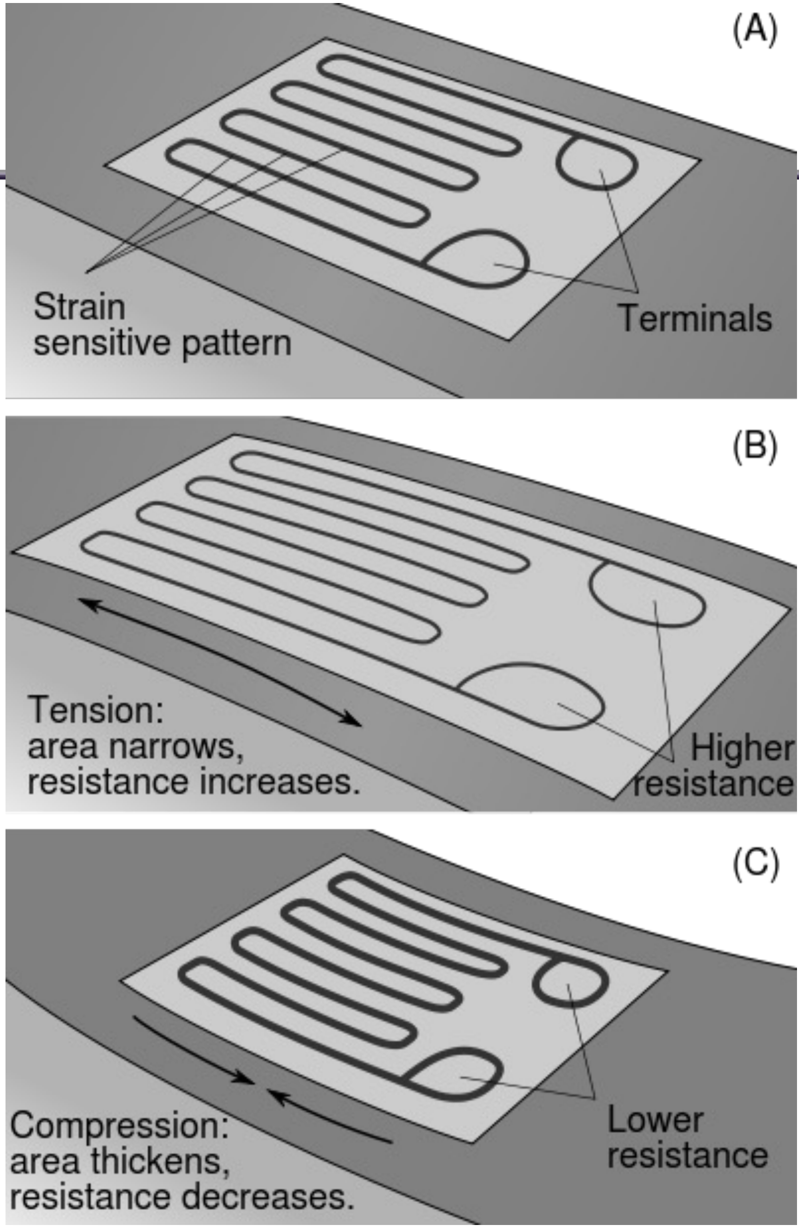


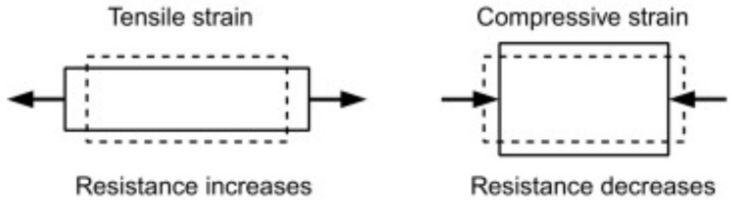




https://www.omega.com/en-us/sensors-and-sensing-equipment/pressure-and-strain/c/strain-gauges

- La piste est en méandre pour atteindre une résistance nominale de 300 Ω ou 1 kΩ
- La jauge est sensible principalement selon la direction des longues pistes.





Les jauges de déformation fonctionnent sur la base d'un changement de résistance électrique.

Cette résistance (Ω) dépend de la déformation (idéalement linéaire et monotone).

$$\frac{\Delta R}{R} = GF.\varepsilon$$

Figure provient de: https://en.wikipedia.org/wiki/Strain_gauge

Jauges de déformation (*strain gauge*)

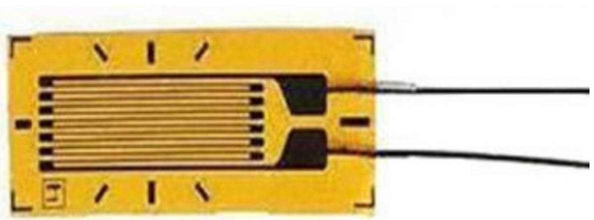
- facteur de jauge (*gauge factor GF*): changement relatif de la résistance suite à la déformation relative

$$\frac{\Delta R}{R} = GF.\varepsilon$$

$$GF = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon} = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta L}{L_0}}$$

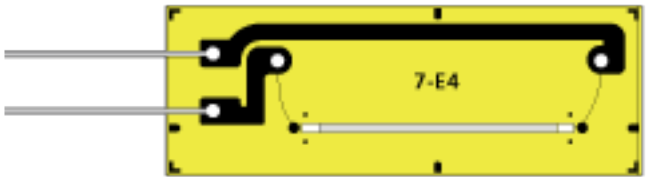
- Jauges de déformation: vaste choix de matériaux:
  - fil métallique
  - couche mince de métal
  - semi-conducteurs (principalement du silicium dopé)
  - …

Film métallique GF= 2

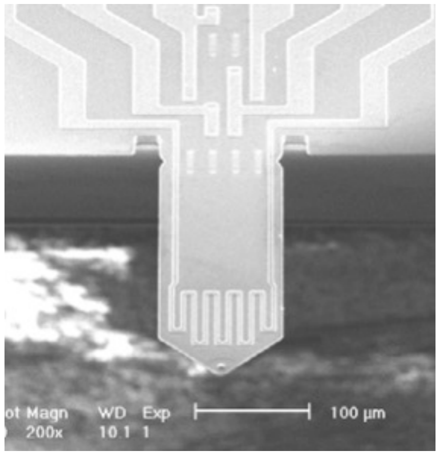


https://www.indiamart.com/proddetail/strain-gauge-19796589188.html

Semiconducteur GF= 100



https://www.kyowa-ei.com/eng/product/category/strain_gages/ksplb/index.html



MEMS cantilever with embedded doped Si strain gauges GF= 30

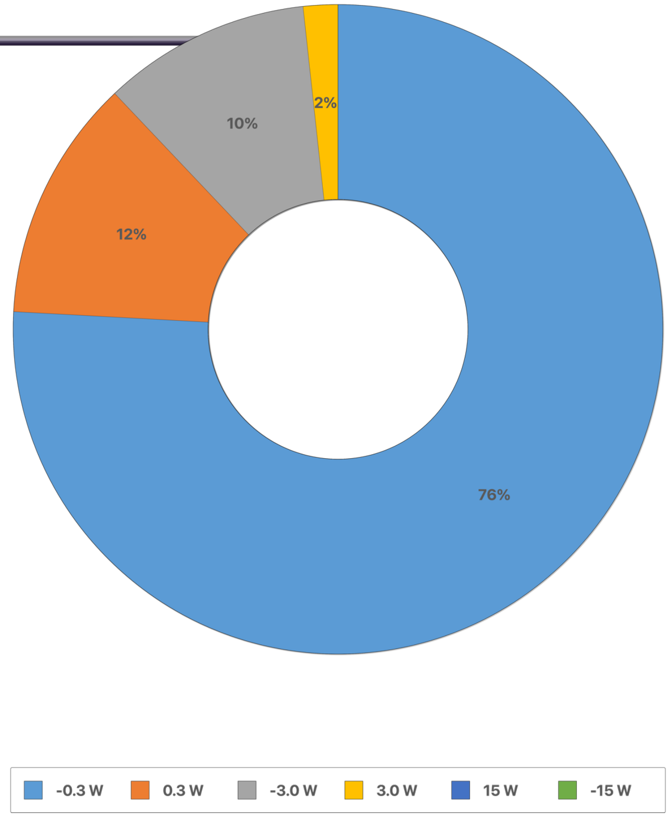
Quelle résistance de la gauge?

Une jauge de déformation de résistance initiale $R_0 = 1\ k\Omega$ avec GF=2 est collé sur une barre en acier (E= 200 GPa) de longueur initiale L_0 = 10 cm.

Par un vérin, on raccourci la barre de 15 µm

Quel est le changement de résistance de la gauge?

A. -0.3 Ω
B. 0.3 Ω
C. -3.0 Ω
D. 3.0 Ω
E. 15 Ω
F. -15 Ω



$-0.3\ \Omega$

Négatif car en compression (donc résistance diminue)..
$2 \times 1\ k\Omega \times 15\ e\text{-}6\ /\ 1e\text{-}1$

Loi de Hooke

Lien en Contrainte σ et Déformation Relative ε

- Relation linéaire entre Contrainte et Déformation Relative

$$\sigma \propto \epsilon$$

Relation linéaire valide jusqu'à une valeur de σ ou ε au-delà duquel la relation devient non-linéaire.

- **Loi de Hooke pour contrainte normale**

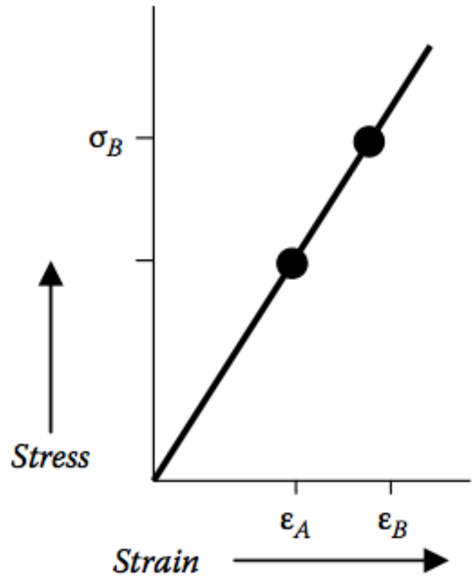
$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$$

E (Pa) = "module de Young " ou *"module élastique"*

- **Loi de Hooke pour contrainte en cisaillement:**

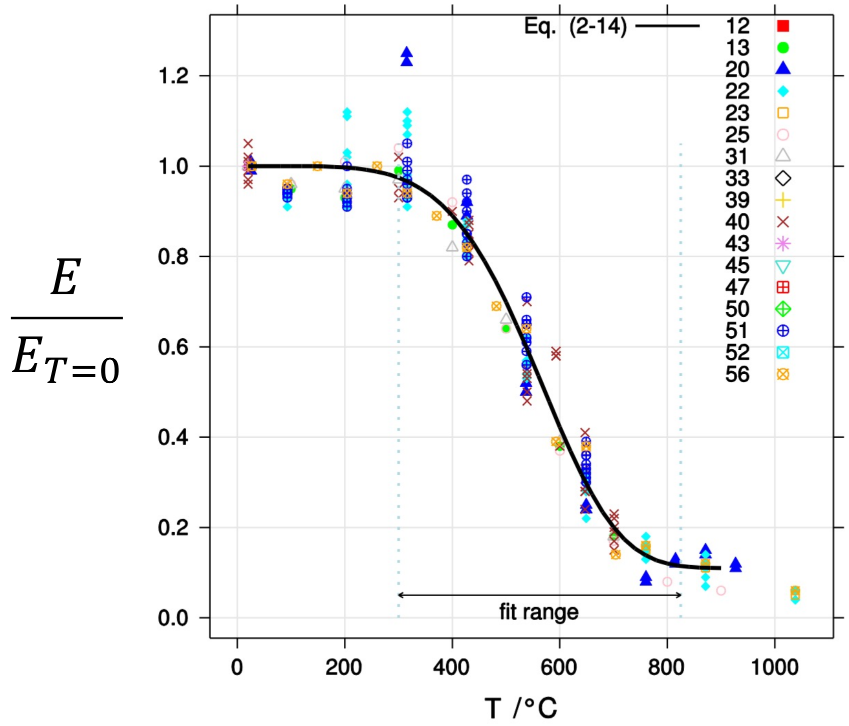
$$\boxed{\tau = G \cdot \gamma}$$

G (Pa) =« module de cisaillement » ou *"module de rigidité"*



Hypothèses pour l'expression simple de la loi de Hooke

- ❑ Matériau homogène et isotrope
- ❑ Aucune dépendance de E and G sur la température



acier

https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/TechnicalNotes/NIST.TN.1907.pdf

- Suite la semaine prochaine avec Danick Briand!

- Contraintes, déformations relatives, et loi de Hooke en 2D et 3D